

Министерство сельского хозяйства Российской Федерации
Санкт Петербургский государственный аграрный университет

Кафедра надёжности и технического сервиса машин

Методические указания для практических занятий и
самостоятельной работы
по дисциплине «Надёжность технических систем»

Раздел 2. Статистические модели надёжности технических систем

*Для студентов специальности 110304.65 Технология обслуживания и
ремонта машин в АПК*

Санкт – Петербург Пушкин
2010 год.

УДК 631. 3. 004. 62

СКОВОРОДИН В.Я. Методические указания для практических занятий и самостоятельной работы по дисциплине «Надёжность технических систем»: Раздел 2. Статистические модели надёжности технических систем / Санкт Петербургский государственный аграрный университет. СПб, 2010. - 23 с.

Рекомендовано к печати:

Методической комиссией инженерно – технологического факультета
(протокол № от 2010г.)

Методическим советом Санкт Петербургского государственного
аграрного университета (протокол № от 2010г.)

Рецензент канд. техн. наук, доц. Бабенко Э.П.

1. Теоретические пояснения

Во многих случаях возникает задача на основе имеющихся данных наблюдений или испытаний на надёжность определить законы распределения показателей, как некоторых случайных величин.

К сожалению, в настоящее время не существует никакого способа непосредственно получить из некоторых статистических данных математическую модель (математическое выражение) закона распределения показателя. Известные методы позволяют лишь подтвердить (или не подтвердить) соответствие данного статистического материала некоторой заранее выдвинутой гипотезе о законе распределения. Таким образом, процедура нахождения хорошей математической модели - закона распределения случайной величины, всегда складывается из двух этапов:

1. Выдвижение гипотез о математических моделях распределения.
2. Проверка соответствия выдвинутых гипотез имеющимся статистическим данным.

Гипотезы о законе распределения могут выдвигаться на основе теоретического анализа физической природы и свойств рассматриваемой случайной величины. Источником этих гипотез может служить предварительный анализ технических систем на этапах проектирования, испытаний и эксплуатации, а также при оценке правильности установления и продления ресурсов и сроков их эксплуатации.

Знание теоретических законов распределения показателей надёжности машин даёт возможность прогнозировать надёжность техники на определённый период с заданной вероятностью, планировать сроки и трудоёмкость ремонта, оптимизировать объём запасных частей и материалов и решать другие задачи.

Многолетний опыт исследования надёжности автомобилей показывает, что в качестве математических моделей в основном можно использовать ограниченное число законов распределений случайных величин:

- нормальное распределение (распределение Гаусса);
- распределение Вейбулла;
- экспоненциальное (показательное) распределение.

Нормальное распределение очень часто используется на практике. Основная его особенность состоит в том, что он является так называемым предельным законом, к которому приближаются другие законы. Распределение показателя подчиняется нормальному закону, если на изменение показателя оказывают влияние много равнозначных факторов, сложение нескольких одинаковых или различных теоретических законов распределения так же в итоге приводит к закону нормального распределения.

Модель нормального распределения применяется для описания:

- рассеивания полных до ремонтных, межремонтных ресурсов и сроков службы машин и их сборочных единиц;
- рассеивания данных о времени и стоимости восстановления работоспособности машин после отказов;

- рассеивания размеров рабочих поверхностей деталей узлов и агрегатов и многих других показателей.

Математическая модель нормального распределения (функция распределения плотности вероятности) имеет вид:

$$f(t) = \frac{1}{S\sqrt{2p}} e^{-\frac{(t-m)^2}{2s^2}},$$

где m и S параметры распределения:

m - математическое ожидание (генеральное среднее);

S - среднее квадратическое отклонение.

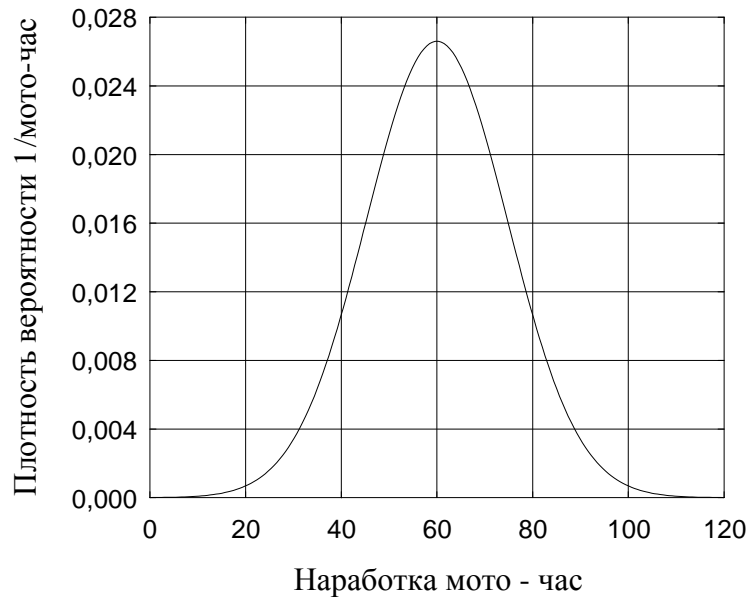


Рис. 1. Нормальное распределение наработки на отказ ($m=60$ и $S=15$ мото - часов).

Интегральная функция распределения определяется интегрированием функции плотности вероятности:

$$F(t) = \frac{1}{S\sqrt{2p}} \int_0^{\infty} e^{-\frac{(t-m)^2}{2s^2}} dt.$$

Поскольку интеграл в явном виде не берётся, для практических расчётов применяют центрированную и нормированную функцию ($m=0$ и $S=1$):

$$F_0(t) = \frac{1}{\sqrt{2p}} \int_0^{\infty} \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right) dt.$$

Функция $F(t)$ выражается через F_0 по формуле:

$$F(t) = F_0\left(\frac{t-m}{S}\right)$$

Значения нормальной функции приводятся в статистических таблицах, любые функции нормального распределения имеются в категории статистические пакета Excel.

Оценки параметров нормального распределения по опытным данным определяются в следующем порядке.

Несмещённой оценкой для параметра m (генерального среднего) является выборочное среднее:

$$\bar{t} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n t_i,$$

где t_1, t_2, \dots, t_n - совокупность данных в выборке;

n - число данных в выборке.

Несмещённой оценкой S является среднее квадратическое отклонение выборочных данных, определяемое по формуле:

$$S = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (t_i - \bar{t})^2}$$

Отличительной особенностью нормального распределения является его симметричность относительно среднего значения (рис 1).

Закон распределения Вейбулла занимает одно из наиболее часто применяемых в оценке надежности технических систем по результатам испытаний и эксплуатации. Это распределение Вейбулл разработал для описания рассеивания параметров усталостной прочности стали и пределов ее упругости, а в дальнейшем применил для решения других задач. В настоящее время закон распределения Вейбулла нашел применение для:

- описания характеристик рассеивания наработок между отказами;
- описания рассеивания ресурсов деталей, отказ которых возникает в следствии изнашивания рабочих поверхностей;
- при описании надежности сложных технических систем и во многих других случаях.

Математическая модель распределения Вейбулла – функция плотности вероятности $f(t)$ (дифференциальная) и функция распределения $F(t)$ (интегральная) имеют вид:

$$f(t) = \frac{b}{a} \left(\frac{t}{a}\right)^{b-1} e^{-\left(\frac{t}{a}\right)^b}, \quad F(t) = 1 - e^{-\left(\frac{t}{a}\right)^b},$$

где a и b - параметры распределения:

a - параметр масштаба;

b - параметр формы.

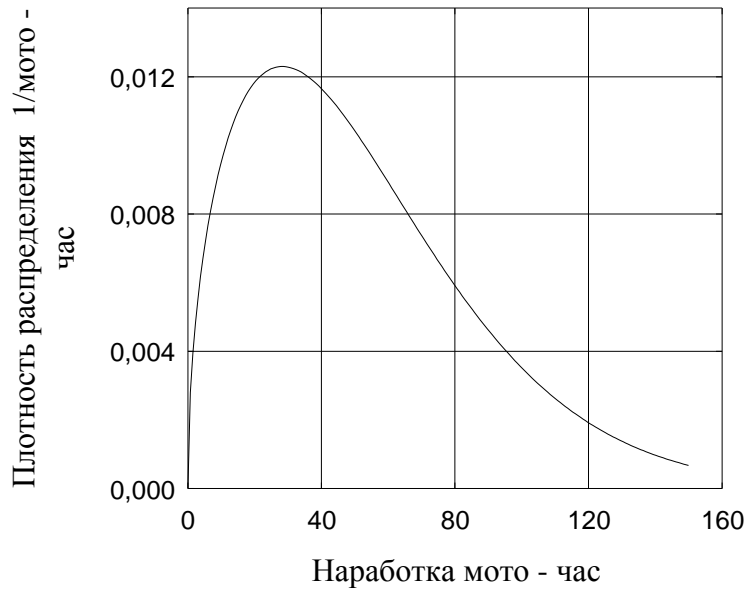


Рис. 2. Распределение наработки на отказ по закону Вейбулла ($a = 60$ мото - часов и $b = 1,5$).

Эти уравнения справедливы для случаев, когда рассеивание данных начинается от нуля (например, наработки объектов до отказа). При обработке данных о надёжности выясняется, что рассеивание показателей (например ресурс) может быть сдвинуто от нуля в большую сторону. Тогда функция распределения плотности вероятности и функция распределения Вейбулла примут вид:

$$f(t) = \frac{b}{a} \left(\frac{t-c}{a} \right)^{b-1} e^{-\left(\frac{t-c}{a} \right)^b}, \quad F(t) = e^{-\left(\frac{t-c}{a} \right)^b},$$

где c дополнительный параметр, называемый параметром сдвига.

Отличительной особенностью распределения Вейбулла является правосторонняя асимметрия функции плотности вероятности (рис. 2).

Параметры распределения Вейбулла по выборочным данным определяются в следующем порядке.

Параметр распределения b можно определить по таблицам распределения Вейбулла (исходя из значений коэффициента вариации - V_t или коэффициента асимметрии - r).

$$V_t = \frac{S}{\bar{t} - t_{\min}}, \quad r = \frac{\frac{n}{(n-1)(n-2)} \sum_{i=1}^n (t_i - \bar{t})^3}{S^3}$$

В таблице распределения Вейбулла по заданным V_t или r находят значение параметра b и коэффициенты S_b и K_b .

Параметр a определяется по формуле: $a = \frac{S}{C_b}$,

где S - среднее квадратическое отклонение выборочных данных.

Параметр c определяется по формуле $c' = \bar{t} - aK_b$ и условий:

$$c = c' \text{ если } c' \leq t_{\min}; \quad c = t_{\min} \text{ если } c' > t_{\min}; \quad c = 0 \text{ если } c' < 0.$$

При отсутствии таблиц распределения Вейбулла, параметры распределения можно определить по приближенным формулам (при значении коэффициента вариации в пределах 0,30 – 0,72):

$$b = \frac{1}{V_t^{1.06}}, \quad a = 1.11(\bar{t} - t_{\min}), \quad c = t_{\min}$$

Экспоненциальный закон в теории надежности нашел широкое применение в следствии его простоты для практического применения. Решение многих задач в области надежности с использованием закона экспоненциального распределения оказывается намного проще, чем при использовании других законов распределения. Этот закон описывает надежность работы машины в период ее нормальной эксплуатации, когда постепенные (износные) отказы еще не проявляются и надежность характеризуется внезапными отказами. Эти отказы вызываются неблагоприятным сочетанием различных факторов и поэтому имеют постоянную интенсивность отказов. Существенное достоинство этого закона состоит в том, что он имеет один параметр.

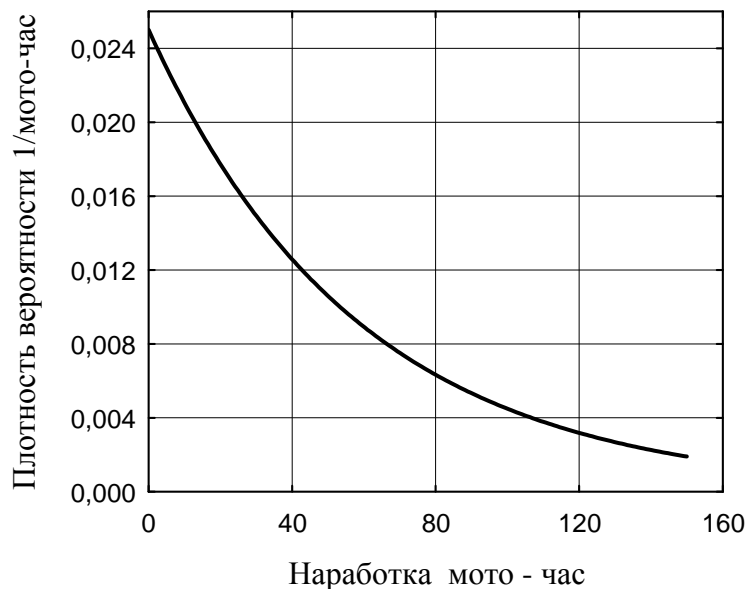


Рис. 3. Экспоненциальное распределение наработки на отказ ($\bar{t} = 60$).

Экспоненциальным законом распределения часто описывается время безотказной работы различных изделий. Кроме того, этот закон используют при решении проблем, связанных с обслуживанием сложных систем. Экспоненциальное распределение применяют также для описания времени безотказной работы системы с большим числом последовательно соединенных элементов, если каждый из элементов в отдельности не оказывает влияния на

отказы других элементов системы. Применение этого закона во многих случаях позволяет существенно упростить расчетные формулы.

Математическая модель экспоненциального распределения имеет вид:

$$f(t) = \lambda e^{-\lambda t} \quad F(t) = 1 - e^{-\lambda t},$$

где λ - параметр распределения.

Значение параметра λ определяется по формуле: $\lambda = \frac{1}{t}$

Экспоненциальное распределение является частным случаем распределения Вейбулла при значении параметра формы равным единице.

Выбор теоретического закона распределения для конкретных данных можно сделать по виду гистограммы или полигона опытного распределения и коэффициенту вариации.

Если коэффициент вариации меньше 0,33 и гистограмма имеет симметричный вид, можно для проверки взять нормальный закон распределения. Если коэффициент вариации больше 0,33 и гистограмма имеет явную асимметрию, выбирают закон распределения Вейбулла. Для неопределённых случаев производится расчёт по двум законам распределения с последующей проверкой и выбором наиболее подходящего.

Для проверки допущения, что принятое теоретическое распределение (статистическая модель) обеспечивает достаточно точное описание данных испытаний (выборочных данных), необходима статистическая проверка. Физический смысл проверки заключается в определении степени расхождения опытной и теоретической вероятностей. При этом, в качестве меры совпадения (или расхождения) выбирают различные критерии согласия (сумму квадратов отклонения теоретических вероятностей от опытных, наибольшее отклонение кривой накопленных вероятностей от интегральной кривой теоретического закона распределения и др.). Критерий согласия так же является случайной величиной и, следовательно, подчиняется определённому закону распределения.

Обычно такая проверка включает следующие этапы.

1. На основе полученных данных вычисляется некоторое число, которое называют **критерием согласия**.

2. Определяется вероятность получения вычисленного критерия согласия при условии, что модель выбрана правильно.

3. По величине вероятности делается вывод. Если вероятность мала, делается заключение, что принятая статистическая модель (закон распределения) не даёт правильного описания данных. Малой величиной вероятности считают вероятность, равную 0,1 или 0,15. Если вероятность не мала, то можно считать, что модель подходит.

При этом нужно чётко представлять, что эта методика позволяет отвергнуть ошибочную модель, но не позволяет доказать, что именно эта модель является единственной верной. Могут быть и другие модели, которые так же не противоречат выборочным данным.

Разработано много критериев для оценки справедливости принятой

модели. Наиболее часто применяемыми являются критерий согласия Пирсона **хи – квадрат** (C^2). Основное его преимущество заключается в том, что его можно применять для проверки допущения о любом распределении, даже не зная параметров распределения.

Критерий согласия Пирсона **хи – квадрат** (C^2) представляет собой сумму квадратов отклонений опытных и теоретических частот в каждом интервале статистического ряда информации и определяется по формуле:

$$C^2 = \sum_{k=1}^k \frac{(m_k - m_{Tk})^2}{m_{Tk}},$$

где k - число интервалов в укрупнённом статистическом ряду;

m_k - опытная частота в k - ом интервале;

m_{Tk} - теоретическая частота в k - ом интервале.

Если в интервалах статистического ряда число данных меньше 5, то такие интервалы должны быть объединены в один интервал (границы интервала и его середина изменится), чтобы число данных в объединённом интервале было не меньше 5. Полученный в результате объединения статистический ряд называется укрупнённым (число интервалов в нём должно быть не менее 4).

Теоретическую частоту в интервале можно определить двумя способами. Пользуясь функцией распределения (интегральной) по формуле:

$$m_{Tk} = n(F(t_{kK}) - F(t_{kH})),$$

где $F(t_{kH})$ - значение функции распределения в начале k - го интервала;

$F(t_{kK})$ - значение функции распределения в конце k - го интервала;

n - число данных в выборке.

Пользуясь функцией распределения плотности вероятности (дифференциальной) по формуле:

$$m_{Tk} = nh_k f(t_{kC}),$$

где h_k - величина интервала;

$f(t_{kC})$ - значение функции плотности вероятности в середине k - го интервала.

При расчётах необходимо иметь в виду, что в объединённых интервалах границы интервалов и их середины изменяются.

По величине критерия согласия χ^2 определяют вероятность совпадения опытных и теоретических частот. Для этого пользуются таблицами распределения χ^2 , по которым с помощью величины χ^2 определяют вероятность $P(\chi^2)$ (вероятность совпадения). Входами в таблицу являются значение χ^2 и число степеней свободы (r).

Число степеней свободы определяется по формуле:

$$r = k - z,$$

где k - число интервалов укрупнённого статистического ряда;

z - число обязательных связей.

Для чаще всего применяемых в надёжности нормального распределения и закона распределения Вейбулла, число обязательных связей $z=3$: две связи – 2 параметра распределения и третья связь – условие $\sum P=1.0$.

По величине вероятности $P(\chi^2)$, если она больше 0,5, делают заключение, что выбранное теоретическое распределение адекватно описывает опытные данные.

2. Рекомендации для самостоятельной работы

2.1 Вопросы для самостоятельного изучения

Для освоения материала по теме необходимо дополнительно изучить следующие вопросы по учебникам:

- основные законы распределения случайных величин, применяемые при оценке показателей надёжности;
- условия применения нормального закона распределения;
- характеристика распределения Вейбулла и условия его применения;
- характеристика и применение экспоненциального закона распределения;
- порядок выбора теоретического закона распределения для описания эмпирического распределения показателей надёжности;
- критерии согласия опытных и теоретических распределений;

2.2. Литература

1. Надёжность и ремонт машин : учебник для вузов / В. В. Курчаткин [и др.] ; под ред. В. В. Курчаткина. - М. : Колос, 2000. - 775с. - (Учебники и учеб. пособия для студ. высш. учеб. заведений).

2. Атапин В.Г. Основы работоспособности технических систем. Автомобильный транспорт: Учебник.- Новосибирск: НГТУ, 2007.-313с.

3. Половко А.М., Гуров С.В. Основы теории надёжности: Санкт-Петербург-БХВ,2008.-704с.

4. Зорин В.А. Основы работоспособности технических систем: Учебник.- М: Академия, 2009.-208с.

3. Методика выполнения расчётов

3.1. Задание.

Подобрать статистическую модель распределения ресурса тракторного двигателя. Данные наблюдений приведены в таблице 7. Вариант задания назначается преподавателем.

Порядок выполнения задания приведён ниже. Пример исходных данных варианта задания приведён в таблице 1.

Таблица 1. Ресурс тракторных двигателей (мото-часы).

№ дв.	Ресурс	№ дв.	Ресурс	№ дв.	Ресурс	№ дв.	Ресурс	№ дв.	Ресурс	№ дв.	Ресурс
1	3961	19	3911	37	3710	55	3681	73	3824	91	3715
2	3831	20	3740	38	3652	56	3626	74	3823	92	4056
3	3781	21	3716	39	3690	57	3746	75	3914	93	3880
4	3925	22	3627	40	3772	58	3819	76	4178	94	3636
5	3684	23	3730	41	3672	59	3773	77	3840		
6	3751	24	3646	42	3911	60	3747	78	3816		
7	3746	25	3892	43	3911	61	3764	79	3683		
8	3771	26	3762	44	3772	62	3699	80	3946		
9	3889	27	3692	45	4100	63	3678	81	3818		
10	3711	28	3793	46	3935	64	3740	82	3631		
11	3817	29	3843	47	3629	65	3709	83	3714		
12	3761	30	3680	48	3730	66	3708	84	3744		
13	3798	31	3787	49	3817	67	3885	85	3837		
14	3863	32	3743	50	3956	68	3791	86	3801		
15	3739	33	3860	51	3826	69	3883	87	3708		
16	3697	34	3969	52	3692	70	3858	88	3740		
17	3704	35	3755	53	3767	71	3687	89	3823		
18	3806	36	3706	54	3999	72	3664	90	3706		

3.2. Определение числовых характеристик.

Для расчёта в Excel 2007 нужно войти на вкладку **Данные** (в Excel 2003 в меню **Сервис**) выбрать **Анализ данных**, а в диалоговом окне **Анализ данных** из инструментов анализа выбрать **Описательная статистика**. В поле **Описательная статистика** нужно указать следующие параметры:

В поле **Входной интервал** вводится ссылка на ячейки, содержащие анализируемые данные.

Переключатель **Группирование** устанавливается в положение по столбцам или по строкам в зависимости от расположения данных во входном диапазоне.

Флажок **Метки в первой строке** устанавливается, если в диапазоне результатов расчёта заранее вписаны заголовки. Для простоты расчётов флажок лучше не устанавливать, в этом случае заголовки будут созданы автоматически.

В поле **Параметры вывода** переключатель устанавливается в положение **Выходной интервал** и указывается ячейка, начиная с которой вниз и вправо будут размещаться результаты расчёта.

Параметр **Итоговая статистика** необходимо активировать.
Результаты расчёта представлены в таблице 2.

Таблица 2. Статистические характеристики ресурса тракторного двигателя

Обозначение	Наименование показателя	Значение
\bar{t}	Среднее	3786
m_t	Стандартная ошибка	11
Me	Медиана	3765
Mo	Мода	3626
S	Стандартное отклонение	107
D	Дисперсия выборки	11497
E	Эксцесс	1,42
A	Асимметричность	1,03
R	Интервал	551
t_{\min}	Минимум	3626
t_{\max}	Максимум	4178
	Сумма	355916
n	Счет	94
V_t	Коэффициент вариации	0,67

Коэффициент вариации необходимо определить по формуле:

$$V_t = \frac{S_t}{\bar{t} - t_{\min}}$$

3.3. Построение таблицы частот.

3.3.1. Определяется размах варьирования показателя:

$$R = 4178 - 3626 = 551$$

3.3.2. Рассчитывается количество интервалов:

$$k = \sqrt{94} = 9,7$$

Полученное значение округляется до целого числа, $k=10$

3.3.3. Определяется величина одного интервала:

$$h = \frac{551}{10} = 55,1 \quad \text{для упрощения дальнейших расчётов величина}$$

интервала округляется - $h=60$.

3.3.4. Определяются границы интервалов.

Для этого устанавливают нижнюю границу первого интервала (t_1^H):

$$t_1^H = 3626 - 0.5 \times 60 = 3596 \text{ Округляя, принимают } t_1^H = 3600.$$

Верхняя граница первого интервала и его середина соответственно равны:

$$t_1^G = 3600 + 60 = 3660 \quad t_1^C = 3600 + 0,5 \times 60 = 3630$$

Определяют границы всех остальных интервалов последовательным суммированием величины интервала к соответствующим границам. Результаты заносят в таблицу 3.

3.3.5. Определяют абсолютные частоты попадания значений показателя в каждый интервал путём подсчёта числа значений, попадающих в соответствующие интервалы. Это можно сделать с помощью функции **Частота** из категории **Статистические**. В этой функции два аргумента: **массив данных** – необходимо указать диапазон ячеек анализируемых данных и **массив интервалов** – необходимо указать диапазон ячеек интервалов. В функции **Частота** подсчёт числа попаданий значений в интервал производится в соответствии с формулой:

$$t_k^H < t_k \leq t_k^G.$$

Поэтому в аргументе **массив интервалов** нужно указать массив верхних границ интервалов. При расчёте необходимо ввести формулу как формулу массива - выделить ячейки, в которых будут результаты расчёта, нажать клавишу **F2**, а затем комбинацию клавиш **Ctrl+Shift+Enter**.

Результаты расчёта заносят в таблицу 3.

Таблица 3. Таблица частот ресурса тракторного двигателя.

№ интервала	Границы интервалов			Выборочные		Теоретические	
	Нижняя	Верхняя	Середина	Частота	Частость	Частота	Частость
1	3600	3660	3630	6	0,06	7	0,06
2	3660	3720	3690	24	0,26	23	0,26
3	3720	3780	3750	21	0,22	22	0,22
4	3780	3840	3810	18	0,19	17	0,19
5	3840	3900	3870	10	0,11	11	0,11
6	3900	3960	3930	8	0,09	6	0,09
7	3960	4020	3990	3	0,03	3	0,03
8	4020	4080	4050	1	0,01	2	0,01
9	4080	4140	4110	1	0,01	1	0,01
10	4140	4200	4170	1	0,01	0	0,01

3.3.6 Построение полигона распределения

Для построения полигона распределения нужно выделить ячейки середин интервалов и ячейки соответствующих частот, на панели инструментов **Вставка** в разделе **Диаграммы** выбрать тип диаграммы **Точечная с прямыми соединениями между точками и маркёрами**.

Построенный график необходимо отформатировать:

- отформатировать область диаграммы (убрать заливку поля и границы) - выделить область диаграммы (щелчком мыши на диаграмме за пределами осей графика) и в разделе **работа с диаграммами** включить **Макет** \Rightarrow **Формат выделенного фрагмента** и в формате области диаграммы установить - **Заливка** – нет заливки, **Цвет границы** – нет линий;

- ограничить линиями область построения - в разделе **работа с диаграммами** включить **макет** \Rightarrow **Область построения** \Rightarrow **Удалить заливку** \Rightarrow **Дополнительные параметры области построения** и в разделе **Формат области построения** в опции **Цвет границы** установить сплошная линия, цвет чёрный;

- установить линии сетки - в разделе **работа с диаграммами** включить **Макет** \Rightarrow **Сетка** \Rightarrow **Горизонтальные линии сетки** \Rightarrow **Основные линии сетки** \Rightarrow **Дополнительные параметры линий сетки** и в опции **Формат основных линий сетки** \Rightarrow **Цвет линии** - сплошная линия, цвет чёрный, **Тип линии** – установить ширину (например, 0,75 пт.)

- установить параметры осей - в разделе **работа с диаграммами** включить **Макет** \Rightarrow **Оси** \Rightarrow **дополнительные параметры оси** \Rightarrow **Параметры оси**: - минимальное значение – фиксированное (400), максимальное значение – фиксированное (600), цена основного деления – фиксированное (50), цвет линии – сплошная линия, цвет чёрный (аналогично установить параметры вертикальной оси);

- установить название осей - в разделе **работа с диаграммами** включить **Макет** \Rightarrow **Название осей** \Rightarrow **Название основной горизонтальной оси** (например, пробег тыс. км.), (аналогично установить параметры вертикальной оси);

- установить формат линии графика- в разделе **работа с диаграммами** включить **Макет** \Rightarrow **Формат выделенного фрагмента** \Rightarrow **Формат ряда данных** и изменить следующие настройки:

- **Параметры маркёра** – встроенный, тип (например, прямоугольник). Размер (например, 5 пт.), заливка – нет;

- **Цвет линии** – сплошная линия, цвет чёрный;

- **Тип линии** – установить ширину линии (например 2 пт.);

- **Тип линии маркёра** – сплошная линия, цвет чёрный;

- установить размеры графика. Для этого выделить график, в разделе **работа с диаграммами** включить **Макет** \Rightarrow **Формат** и установить размеры графика (обычно ширина– 8-10см., высота – 6-8 см.).

График полигона распределения показан на рисунке 4. Из рисунка следует, что распределение не симметрично. Коэффициент вариации ресурса больше 0,33. Это даёт основание принять в качестве статистической модели распределение Вейбулла.

3.4. Определение параметров распределения Вейбулла.

В таблице распределения Вейбулла по коэффициенту вариации V_t

находят значение параметра $b=1.5$ и коэффициентов $C_b=0.61$ и

$$K_b=0.9. \text{ Параметр } a \text{ равен: } a = \frac{S}{C_b} = 175.8,$$

где S - среднеквадратическое отклонение выборочных данных.

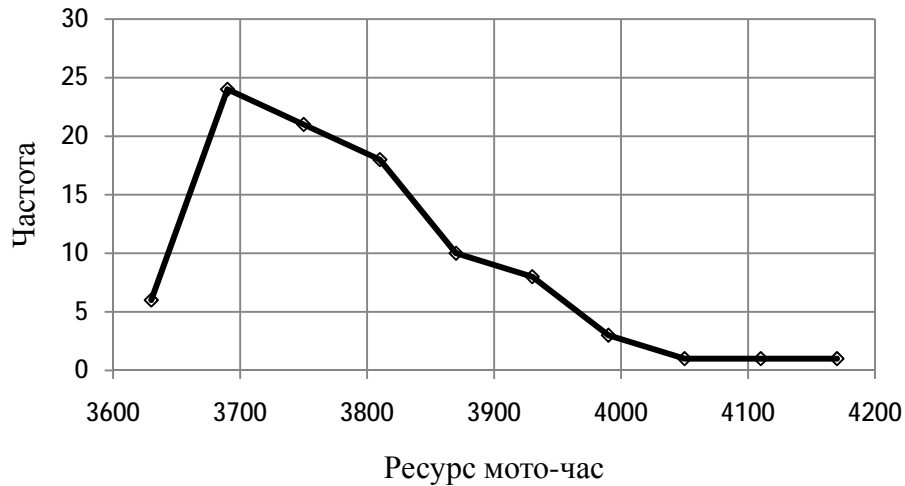


Рис. 4. Полигон распределения ресурса тракторного двигателя.

Вспомогательное значение параметр c равно:

$$c' = \bar{t} - aK_b = 3628, \text{ так как } c' > t_{\min} \text{ принимают}$$

$$c = t_{\min} = 3626.$$

Расчёт по приближённым формулам даёт следующие результаты:

$$b=1,53, \quad a=175,5, \quad c=3626, \text{ то есть, практически те же}$$

значения. Округляя значения параметров окончательно принимают:

$$a=175 \quad b=1,5 \quad c=3626$$

3.5. Расчёт теоретических частот.

Зная параметры теоретического распределения, можно вычислить теоретические частоты для каждого интервала.

Для этого в категории функций **Статистические** необходимо выбрать функцию **Вейбулл** и ввести значение переменной, для которой вычисляется значение функции (в рассматриваемом примере нужно указать ячейку середины первого интервала). Затем нужно ввести значения параметров распределения Вейбулла.

Альфа – параметр формы b ;

Бета - параметр масштаба a .

В аргументе **Интегральная** нужно проставить значение 1, если рассчитывается значение интегральной функции или значение 0, если рассчитывается значение дифференциальной функции. Так как

рассчитываются частоты по интервалам, нужно взять дифференциальную функцию.

Результат расчёта – значение теоретической функции в точке середины интервала на оси абсцисс. Для определения относительной частоты в интервале необходимо значение функции умножить на величину интервала, а для подсчёта частоты для заданного объёма выборки (n) необходимо дополнительно умножить на n . Аналогичный расчёт необходимо выполнить для каждого интервала. Результаты для рассматриваемого примера приведены в таблице 3 в графе теоретическая частота.

3.6. Расчёт критерия согласия.

Для проверки допущения, что принятое теоретическое распределение (статистическая модель) обеспечивает достаточно точное описание данных испытаний (выборочных данных), необходима статистическая проверка. Статистическую проверку производится по критерию согласия Пирсона χ^2 – квадрат (χ^2)

При расчёте критерия должно быть выполнено условие, чтобы в каждом интервале теоретическая частота должна быть более 5. Если в некоторых интервалах это требование нарушено, соседние интервалы нужно объединить в один. Так, в рассматриваемом примере нужно объединить в один 7, 8, 9 и 10 интервалы. В объединённом интервале опытные и теоретические частоты суммируются и таблица частот будет иметь вид:

Таблица 4. Таблица частот для расчёта критерия χ^2

Номер интервала	Частота		$\frac{(m-m_T)^2}{m_T}$
	Опытная (m)	Теоретическая (m_T)	
1	6	7	0,23
2	24	23	0,01
3	21	22	0,09
4	17	17	0,08
5	11	11	0,09
6	8	6	0,37
7	6	6	1,59
Критерий "хи – квадрат"			0,87

3.7. Проверка гипотезы о возможности применения выбранного закона распределения.

Метод проверки гипотезы о том, что экспериментальные данные не значимо отличаются от принятого закона распределения, заключается в следующем. Задаются вероятностью ошибки (уровнем значимости) – α и по таблице критерия "хи – квадрат" находят предел $\chi^2_{\alpha; \nu}$, при котором

$P(\chi^2 > \chi^2_{\alpha; q}) = \alpha$ Если для заданного уровня значимости рассчитанное значение критерия χ^2 больше $\chi^2_{\alpha; q}$, гипотеза о соответствии принятого теоретического закона экспериментальным данным отвергается, если рассчитанное значение критерия χ^2 меньше $\chi^2_{\alpha; q}$, гипотеза принимается.

Число степеней свободы определяется по формуле:

$$q = k - w - 1,$$

где k – число интервалов,

w – число оцениваемых параметров теоретической функции распределения: для нормального распределения $w = 2$, для распределения Вейбулла $w = 2$, для экспоненциального $w = 1$.

Для приведённого примера (таблица 4) значение χ^2 равно 0,87, по таблице распределения χ^2 (таблица 6) для уровня значимости, например, 0,1 и числе степеней свободы равному 5, критическое значение χ^2 равно 1,61. Фактическое значение χ^2 значительно меньше критического, что позволяет принять гипотезу о распределении ресурса двигателя по закону Вейбулла с вероятностью 0,9.

Вместо таблицы критерия χ^2 можно воспользоваться функцией ХИ2РАСП и точно определить вероятность принятия гипотезы о принятом распределении. В первой опции функции ХИ2РАСП необходимо указать вычисленное значение χ^2 – квадрат, во второй – число степеней свободы. Для рассматриваемого примера для значения $\chi^2=0,87$ числа степеней свободы $q=5$, вероятность равна 0,97.

Для сравнения опытного и теоретического распределения на графике полигона распределения необходимо добавить график теоретических частот. Для этого нужно выделить область диаграммы правой кнопкой мыши и в меню выбрать **выбрать данные** и **выбор источника данных** **добавить** и в опциях **изменение ряда** установить:

Имя ряда – можно не указывать;

Значение x – выделить столбец середин интервалов;

Значение y – выделить столбец теоретических частот.

Полученный график необходимо отформатировать как указано выше. При этом следует иметь в виду, что на теоретической кривой расчётные точки не показывают.

Распределение ресурса двигателей, построенное на основе статистической модели – распределения Вейбулла, показано на рисунке 5. Как видно из рисунка, опытное и теоретическое распределения незначительно отличаются друг от друга.

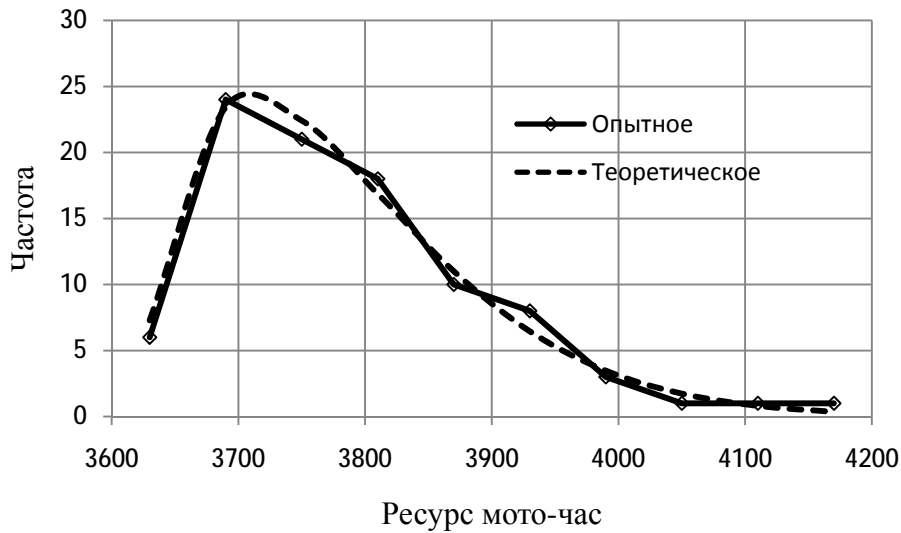


Рис. 5 Опытное и теоретическое распределения ресурса двигателей.

Таким образом, можно сделать заключение, что распределение экспериментальных данных для рассматриваемого примера с вероятностью 0,97 может быть аппроксимировано распределением Вейбулла с параметрами

- параметр масштаба (a) равен 175;
- параметр формы (b) равен 1,5;
- параметр сдвига (c) равен 3626.

Статистическая модель распределения ресурса двигателя имеет вид:

$$f(t) = 0,0086 \times \left(\frac{t-3626}{175} \right)^{0,5} \times e^{-\left(\frac{t-3626}{175} \right)^{1,5}}$$

На основе этого уравнения можно определить все показатели долговечности двигателя.

4. Отчёт

Отчёт о выполненных расчётах выполняется в программе Word и должен включать:

- титульный лист;
- исходные данные для расчёта;
- расчёт, включающий расчётные формулы и результаты ;
- графики (отформатированные).

Отчёт представляется на бумажном носителе.

Таблица 5. Параметры и коэффициенты распределения Вейбулла.

V	b	K_b	S_b	V	b	K_b	S_b	V	b	K_b	S_b
1,26	0,8	1,13	1,43	0,55	1,9	0,89	0,49	0,36	3,0	0,89	0,33
1,11	0,9	1,07	1,20	0,52	2,0	0,89	0,46	0,35	3,1	0,89	0,32
1,00	1,0	1,00	1,00	0,50	2,1	0,89	0,44	0,34	3,2	0,90	0,31
0,91	1,1	0,97	0,88	0,48	2,2	0,89	0,43	0,33	3,3	0,90	0,30
0,84	1,2	0,94	0,79	0,46	2,3	0,89	0,41	0,33	3,4	0,90	0,29
0,78	1,3	0,92	0,72	0,44	2,4	0,89	0,39	0,32	3,5	0,90	0,29
0,72	1,4	0,91	0,66	0,43	2,5	0,89	0,38	0,31	3,6	0,90	0,28
0,68	1,5	0,90	0,61	0,41	2,6	0,89	0,37	0,30	3,7	0,90	0,27
0,64	1,6	0,90	0,57	0,40	2,7	0,89	0,35	0,29	3,8	0,90	0,27
0,61	1,7	0,89	0,54	0,39	2,8	0,89	0,34	0,29	3,9	0,90	0,26
0,58	1,8	0,89	0,51	0,38	2,9	0,89	0,34	0,28	4,0	0,90	0,25

Таблица 6. Значения критерия χ^2

Число степеней свободы	Значение χ^2 для уровней значимости						
	0,1	0,3	0,5	0,7	0,9	0,95	0,99
1	0,016	0,14	0,45	1,07	2,71	3,84	6,63
2	,0211	0,71	1,39	2,41	4,61	5,99	9,21
3	0,594	1,42	2,37	3,67	6,25	7,81	11,3
4	1,06	2,19	3,36	4,88	7,78	9,49	13,3
5	1,61	3,00	4,35	6,06	9,24	11,1	15,1
6	2,2	3,83	5,35	7,23	10,6	12,6	16,8
7	2,83	4,67	6,35	8,38	12,0	14,1	18,5
8	3,49	5,53	7,34	9,52	13,4	15,5	20,1
9	4,17	6,39	8,34	10,7	14,7	16,9	21,7
10	4,87	7,27	9,34	11,8	16,0	18,3	23,2

5. Индивидуальные задания

Таблица 7. Ресурс тракторного двигателя.

№ ДВ.	Варианты задания														
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
1	3884	3620	3618	3276	3388	3565	4230	3718	3782	3960	4658	4108	4330	4626	4539
2	3774	3911	3795	3454	3540	3894	3713	3625	3882	3871	3913	4522	4341	4251	4799
3	3590	3697	4046	3562	3903	4043	3653	3633	3912	4102	3938	4185	4111	4305	4858
4	3713	3605	4225	3320	3468	3806	3541	3888	3854	4109	4156	4132	4220	4212	4773
5	3712	3571	3750	3385	3363	3574	3834	3640	3806	3938	4007	4029	4539	4315	4509
6	3562	3808	3836	3621	3524	3506	3821	3690	3871	4156	4700	4106	4770	4484	4637
7	3823	3626	3856	3729	3482	3570	4368	3829	3761	3842	4040	4435	4169	4452	4991
8	3792	3634	3724	3201	3514	3903	3636	3766	4085	4147	4308	4378	4683	4495	4413
9	3673	3852	3886	3373	3523	3609	4224	4188	3813	3886	4651	4054	4275	4691	4343

10	3743	3554	3635	3267	3606	3617	4430	3886	3790	3993	3923	4294	4313	4480	4356
11	3795	3590	3656	3335	3518	3747	3733	3674	3999	3906	4174	4500	4289	4705	4683
12	3540	3782	4039	3401	3563	3749	3668	3768	3889	3947	3971	4080	4230	4219	4664
13	3590	3965	4450	3304	3481	3468	3968	3773	3957	4122	3984	4145	4158	4615	4333
14	3727	3734	4389	3328	3637	3715	3991	3761	4018	4040	4188	4089	4341	4933	4642
15	4008	3749	4363	3366	3500	4059	4364	3704	3794	3890	3954	4233	4161	4584	4687
16	4039	3671	4463	3417	3556	3478	4268	3637	3831	4003	4143	4097	4402	4391	4593
17	3881	4208	3722	3363	3606	3953	3740	3887	4088	4222	3958	4372	4289	4444	4509
18	3543	3742	3605	3492	3727	3704	3988	3608	3921	3847	4082	4092	4299	4500	4619
19	3674	3697	4017	3663	3518	3474	3800	3796	4060	4147	4345	4137	4523	4498	4654
20	3630	3779	3857	3363	3507	3860	3868	4054	3725	3832	4220	4218	4127	4685	4849
21	3561	3829	3968	3456	3329	3767	3640	3723	3815	4079	4185	4164	4212	4271	4348
22	3657	3884	3813	3487	3449	3579	4137	3894	3946	4133	4452	4450	4213	4393	4464
23	3568	3626	3703	3210	3362	3647	3524	3749	4002	3985	4252	4091	4125	4292	4572
24	3725	4046	3985	3318	3641	3596	3782	3841	4025	4074	4170	4090	4543	4232	4861
25	3677	3947	3946	3372	3551	3469	3592	3779	3817	4121	4590	4044	4548	4469	4446
26	3892	3608	3883	3274	3461	3437	3632	4013	3771	4113	4213	4219	4212	4349	5116
27	3691	3841	3854	3287	3473	3451	3540	3618	3977	3988	4182	4185	4224	4314	4639
28	3934	3637	4089	3510	3589	3570	3857	3735	3985	4709	4200	4052	4416	4407	5170
29	3600	3905	4108	3624	3577	3942	3807	3824	3911	4234	4206	4072	4253	4568	4448
30	3683	3977	3886	3207	3425	3870	3955	4142	3921	4083	4249	4223	4210	4333	4738
31	3604	3620	4560	3270	3569	3419	4030	4139	3838	4079	4238	4291	4298	4637	4819
32	3667	4066	4076	3231	3484	4080	3834	3738	3870	4079	4295	4609	4354	4316	4621
33	3692	3758	4034	3299	3758	3521	3756	3715	4028	3873	4222	4252	4459	4304	4762
34	3660	3760	4018	3528	3644	3862	3553	3860	3910	4155	4125	4168	4146	4591	4424
35	3663	3670	4506	3226	3440	3733	3863	3639	4085	4146	4116	4096	4410	4311	4455
36	3670	3575	3753	3461	3566	3667	3924	3707	3860	3978	4366	4112	4121	4498	4804
37	3721	3580	3678	3590	3542	3528	3564	3693	3847	4031	3927	4025	4317	4679	4341
38	3596	3730	3706	3429	3344	3404	4235	3885	3998	3978	4001	4265	4413	4452	4730
39	3740	3796	3644	3401	3487	3507	3602	3899	3982	3852	4061	4059	4336	4224	5087
40	3767	3858	4029	3349	3697	3597	3730	3806	3857	4315	4129	4012	4371	4245	4763
41	3773	3855	3696	3255	3616	3836	3908	3845	3958	3975	4023	4322	4357	4275	4671
42	3646	3690	3901	3206	3415	3538	3868	3767	3917	4641	3923	4121	4203	4614	4817
43	3674	3649	3703	3313	3494	3842	3912	3998	3792	4105	4041	4246	4466	4394	4530
44	3644	3822	3767	3412	3416	3938	3872	3804	3963	4036	4637	4197	4405	4638	4504
45	3758	4021	3816	3322	3395	3538	3918	3926	3914	3975	4044	4072	4642	4484	4449
46	3612	3890	3873	3374	3463	3996	4825	3893	3760	4372	4050	4259	4351	4405	5139
47	3807	3856	3813	3270	3535	3598	4106	3877	3774	3920	3988	4031	4225	4833	5171
48	3598	3690	4439	3432	3335	3675	3638	4041	3771	3990	4726	4124	4231	4565	5076
49	3760	3674	3697	3672	3523	3823	3767	3608	3806	3858	4225	4127	4400	4266	4487
50	3610	3601	5054	3369	3411	3748	3624	3979	3824	4075	4005	4303	4330	4419	4546
51	3703	4082	4160	3314	3374	3624	3569	4058	3844	3992	4229	4121	4489	4308	4811
52	3654	3834	4170	3280	3448	3475	3622	3757	4153	3970	4306	4115	4211	4556	4418
53	3860	3649	3968	3330	3395	3843	3777	3759	3857	4034	4388	4112	4226	4455	4681
54	3635	3765	3799	3408	3543	3424	3567	3770	4017	4298	4093	4156	4325	4631	4427
55	3954	3747	3705	3223	3666	3507	3909	3696	3748	4014	4333	4207	4286	4399	4414
56	3697	3735	3826	3237	3665	3586	4112	4105	3745	4136	4179	4213	4125	4383	4440
57	3719	3950	3840	3262	3416	3589	3790	3659	3808	4201	4069	4268	4284	4497	4787
58	3654	3745	3713	3390	3575	3518	3744	3668	3850	4243	4296	4329	4288	4419	4728
59	3786	3599	3818	3260	3466	3677	4158	3846	3775	4327	4161	4016	4375	4692	4667
60	3786	3700	4129	3428	3494	3965	3878	3717	4116	3987	4274	4263	4267	4248	4771
61	3522	4106	3738	3370	3447	3401	3644	3766	3893	4114	4498	4104	4339	4669	4446
62	3721	3580	3805	3393	3763	3633	3758	3716	3754	3999	4403	4104	4382	4617	4595
63	3664	3856	3778	3231	3672	3758	3710	3884	3995	3866	4201	4026	4378	4340	4524

64	3537	3621	3607	3413	3749	3951	3660	3794	3900	4258	4561	4187	4261	4291	4453
65	3662	3983	4145	3304	3476	3685	4603	3740	4129	4188	4216	4105	4605	4715	4539
66	3542	3653	3868	3399	3440	3479	3836	3785	4017	4009	4523	4236	4832	4452	4367
67	3555	3815	4672	3392	3347	3531	4177	3875	3953	4074	4115	4080	4140	4350	4610
68	3712	3720	3631	3312	3417	3604	3700	3765	4044	4061	4056	4116	4358	4301	4364
69	3745	4031	3726	3279	3455	3960	4047	3971	3926	4158	3940	4086	4297	4450	4540
70	3640	4139	3863	3406	3359	3476	4431	3732	4001	3820	3972	4260	4284	4408	4521
71	3663	3986	3691	3322	3390	3880	3571	3800	3851	4393	4530	4387	4138	4291	4429
72	3690	4019	4091	3559	3397	3923	3681	3624	3847	4251	4380	4268	4379	4742	4479
73	3799	3835	4170	3291	3390	3929	3909	3936	4028	3942	4048	4194	4512	4301	4709
74	3530	4065	3694	3256	3595	3793	3609	3662	3974	3886	4473	4256	4343	4439	4606
75	3685	3859	3607	3689	3453	3552	4025	3866	3886	3854	4043	4166	4182	4492	4892
76	3736	3575	4511	3529	3590	3595	4762	3893	3827	3942	4056	4418	4200	4886	4709
77	3713	3684	3935	3441	3466	3459	3712	3855	3803	4365	4786	4260	4238	4555	4761
78	3793	3927	4492	3232	3414	3608	3860	3625	3742	3863	4188	4228	4339	4690	4605
79	3806	3978	3738	3203	3603	3515	3699	3730	3829	4022	3959	4024	4340	4276	4739
80	3627	3631	3751	3477	3562	3593	3635	3681	3894	4437	4206	4336	4280	4850	4427
81	3625	3644	3785	3616	3410	3572	3643	3718	4425	4042	4071	4136	4231	4285	4743
82	3683	3715	3755	3483	3580	3746	3544	4029	3863	4081	4378	4009	4324	4328	4580
83	3600	4115	4252	3458	3608	3829	3619	3875	3817	3861	4839	4040	4264	4219	4408
84	3537	3768	3712	3273	3523	3562	3528	3820	3895	4186	3951	4174	4295	4605	4510
85	3642	3911	3695	3282	3380	3795	3797	3626	4247	4314	4030	4101	4132	4245	5100
86	3549	3552	4183	3247	3415	3670	3682	3719	3812	3904	4026	4420	4369	4697	4347
87	3752	3835	3864	3646	3694	3831	3545	3700	4147	4246	4079	4024	4169	4503	4584
88	3812	3846	3850	3918	3545	3801	3955	4335	3835	3810	4058	4181	4341	4596	4812
89	3661	3817	4134	3691	3525	3750	3880	3672	3726	3972	4062	4223	4188	4575	4710
90	3744	3682	3757	3246	3430	4079	3994	3808	3798	3867	4433	4056	4165	4512	4744
91	3973	3783	3717	3293	3395	3695	4019	3659	3945	4534	3997	4265	4247	4427	4901
92	3709	3749	3730	3234	3595	3454	3681	3745	3949	4008	4632	4030	4467	5188	4808
93	3613	3773	3814	3410	3725	3703	3620	3644	4014	4050	4011	4043	4255	4260	4494
94	3624	3721	4437	3289	3373	3447	3683	3704	4104	4227	5403	4067	4481	4528	4445
95	3818	3726	3784	3821	3408	3461	3579	3663	3912	3824	4199	4299	4257	4712	4402
96	3744	3835	3700	3253	3446	3758	3629	3661	3970	4089	3974	4094	4293	4320	4844
97	3741	3714	4049	3318	3424	3793	3605	3605	3809	3903	4646	4224	4547	4580	4766
98	3636	3709	3802	3374	3904	4261	4042		3950	4029	4190	4187	4413	4798	4446
99	3715	3778	3954	3262		3565	3532		3986	3973	4260	4220	4357	4564	4502
100	3824	4065		3416		3832	4312		4040	4030	3998	4383		4501	4504
101	3976	3854		3557		3482	3637		3897		4085	4224		4256	4633
102	3875	3804		3576		3829	3746		3843		4594	4230		4496	4698
103	3670	3665		3294		3777	3573		4017		4434	4043		4385	4528
104	3903	3634		3362		3749	3706		3759		4306	4194		4453	4562
105		3874		3451		3485	3757				4535	4257		4216	4610
106		3957		3303		4072					3984	4175		4468	
107		3711				3542					4009	4059			
108		3842				3867					4415				
109		3772									4429				

Продолжение таблицы 7.

№ ДВ.	Ресурс (для вариантов задания)														
	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
1	4485	3633	3962	3827	4037	4397	4397	4453	4513	4898	5104	4839	4833	3907	4116
2	4813	3681	3838	4494	3996	4449	4623	4350	4434	4686	4904	5019	5033	4321	4254

3	4699	3906	4073	3972	4022	4583	4368	4324	4589	4531	4828	4942	5260	3844	4208
4	4626	3737	4043	4156	3971	4614	4996	4480	4443	5149	4910	5333	5097	4113	4368
5	4598	3749	4139	4328	4512	4337	4513	4248	4427	4591	4794	4919	4831	3899	4104
6	4684	3737	4402	4496	3940	4201	4234	4270	4464	4577	4853	4953	5028	4046	4130
7	4415	3681	3756	3856	4139	4313	4976	4258	4560	4654	4613	4978	5284	3970	3982
8	4684	3752	4325	4295	4216	4252	4335	4488	4432	4675	4713	4766	4997	3945	4012
9	4574	3633	3863	4172	4082	4321	4583	4700	4490	4740	4678	4961	4924	3977	4016
10	4738	3778	3871	3987	4151	4297	4773	4355	4494	5070	4784	4810	4883	4157	4765
11	4647	3673	4287	4280	4085	4261	4458	4303	4513	4723	4831	4821	5021	3923	4249
12	4740	3782	4345	3979	4037	4335	4501	4827	4825	4874	5111	5328	4918	4162	4005
13	4580	3741	3973	3921	4126	4306	4508	4743	4515	4672	5027	5211	4953	4555	4200
14	4534	3775	3902	3906	4033	4291	4383	4568	4698	4878	4798	4865	4961	4197	4069
15	4434	3785	4323	3881	3991	4137	4450	4276	4699	4791	5009	4920	5075	3996	3935
16	4595	3768	3783	4211	3981	4417	4378	4295	4466	4624	4833	5182	5120	4460	4056
17	4696	3872	3951	4765	3974	4562	4306	4456	4671	4698	4937	5405	5049	3949	3963
18	4645	3939	4364	3847	3967	4244	4815	4463	4803	4686	5104	4761	5009	4135	4084
19	4612	3745	3742	4307	4267	4388	4779	4210	4654	4802	5226	4832	4925	4208	4385
20	4786	3704	3982	4044	4028	4140	4997	4391	4676	4753	4906	5264	4986	3897	4242
21	4778	3661	3999	3817	4057	4319	4409	4659	4640	4847	4946	4802	4983	3986	3914
22	4414	3639	3780	4036	4029	4402	4269	4601	4510	4857	4691	4801	4992	3852	4085
23	4629	3582	3790	4046	4180	4410	4467	4627	4567	5009	5257	4821	5048	4068	4171
24	4790	3774	3986	4365	4281	4593	4687	4390	4504	5023	4606	4919	4905	3986	4083
25	4480	3670	3925	4381	4076	4497	4290	4454	4515	4855	4780	5097	4934	3969	3997
26	4863	3595	3955	4061	4086	4406	4346	4503	4624	4992	4758	4744	4952	3894	4126
27	4553	3671	3814	3865	4087	4232	4809	4582	4574	4810	4892	4839	4903	4070	3978
28	4540	3969	3922	4209	3914	4260	4682	4365	4753	4812	4761	4942	4985	3961	4033
29	4593	3683	3781	4479	3962	4329	4395	4271	4531	4651	5331	4878	4878	4138	4385
30	4493	3687	3951	4379	4156	4495	4251	4442	4420	4714	4804	4865	4830	3843	4095
31	4603	3822	3751	4433	4494	4522	4394	4395	4662	4638	4836	4959	4958	4012	4067
32	4490	3647	4182	4027	4057	4219	4278	4371	4758	4816	4760	5030	4819	4118	4333
33	4483	3726	3751	4306	4243	4217	4530	4883	4559	4870	4723	5039	4879	3828	4293
34	4838	3939	4639	4457	4105	4386	4501	5563	4419	4733	5416	4811	5024	4149	3934
35	4883	4007	3775	4256	3997	4237	4634	4492	4428	4859	5133	4787	4901	4011	4083
36	4564	3737	4253	3946	4234	4373	4502	4427	4584	4768	4792	4930	5001	3927	4208
37	4524	3675	3880	4380	4034	4164	4355	4284	4547	4946	5304	4946	4922	3895	3985
38	4560	3983	3869	4800	4361	4384	5114	4292	4712	4767	4878	5202	4871	4030	3986
39	4731	3754	4010	3958	4190	4402	4469	4709	4594	4852	4810	5158	4989	4081	4499
40	4488	3740	3742	4336	4034	4483	4333	4341	4565	4656	4631	4778	4895	4021	4104
41	4498	3663	4089	3920	4014	4735	4675	4318	4565	4633	5257	4935	5055	4196	4526
42	4453	3546	3841	4408	4079	4233	4370	4565	4551	4777	4705	4899	4954	4302	4624
43	4615	3710	4266	4142	4051	4415	4342	4302	4874	4564	4928	4837	4935	3957	4046
44	4679	3640	3959	4085	4164	4351	4206	4381	4488	4685	4697	5356	4981	4040	4020
45	4450	3794	4360	3899	4308	4273	4406	4405	4615	4747	4872	4852	4916	4142	5198
46	4476	3633	3907	4391	3912	4201	4305	4487	4471	4762	4723	5174	4979	4011	3946
47	4762	3770	3939	4287	4339	4327	4274	4219	4743	4781	4859	4762	4934	4171	4112
48	4799	3722	3900	4127	4114	4173	4261	4497	4542	4613	4675	5109	5024	4090	4111
49	4532	4162	3928	4334	3988	4312	4407	4503	4555	4977	4740	5545	4830	3873	4252
50	4632	3810	3936	4287	4008	4230	4319	4594	4672	4874	4773	4901	4901	4270	3963
51	4454	3688	4077	4023	3941	4493	4238	4457	4649	4863	4673	5214	4959	4118	4305
52	4594	3879	3861	3844	4147	4221	4298	4441	4515	4761	5689	5340	4959	3963	5116
53	4635	3662	3984	3912	3995	4167	4224	4560	4482	4668	4920	5073	4933	3866	4096
54	4429	4009	3939	4149	4128	4498	4206	4715	4573	5111	5198	5303	5068	3965	3962
55	4569	3562	4425	3856	3918	4185	4269	4817	4582	4917	4702	4918	4953	3929	4004
56	4504	3727	3899	3907	3943	4240	4321	4427	4702	4648	4756	5119	5124	3893	3960

57	4483	3771	3993	3954	4243	4566	4345	4455	4508	5072	4869	4860	5021	3990	4191
58	4472	3717	4056	4201	4134	4367	4410	5053	4736	4747	4786	4840	4935	3824	4119
59	4425	3603	4230	4565	4053	4224	4495	4367	4965	4665	4911	4903	4931	3875	4350
60	4537	3694	3823	4080	4046	4267	5730	4728	4651	4557	4794	4903	4974	4046	3982
61	4620	3836	4177	3939	4113	4159	4307	4643	4583	4693	4840	4719	4983	3959	4043
62	4727	3842	3756	3877	3921	4383	4508	4284	4978	4694	4861	5282	5018	3884	4171
63	4638	3839	3930	4472	4201	4227	5623	4386	4536	4623	4622	5181	4991	4116	4163
64	4700	3674	3879	4005	4156	4480	4327	4709	4484	4873	4704	5118	4972	3985	4235
65	4578	3862	3817	4227	4372	4350	4383	4565	4707	4621	4729	4780	5044	3962	4273
66	4480	4013	4193	4167	4093	4522	4728	4318	4647	4713	4647	4787	5064	3942	3982
67	4446	3719	4082	4246	4083	4195	4682	4417	4655	4839	5953	4881	4923	4018	3917
68	4446	3890	4497	4271	4281	4431	4288	4765	4567	4763	4835	4996	5060	4255	4103
69	4437	3867	3834	4025	4089	4616	4692	4237	4799	4558	5008	5170	4925	3910	4131
70	4670	3699	4561	3854	3983	4416	4515	5228	4473	4587	5757	5379	5151	4088	4072
71	4509	3676	3978	3854	4128	4339	4292	4514	4789	4739	4637	5479	4858	4359	4143
72	4568	3771	3844	4119	4239	4273	4351	4404	4504	4529	4848	5174	5121	3912	4436
73	4524	3635	3921	3868	4324	4344	4643	4415	4611	4861	4657	4727	5066	4155	4029
74	4471	3663	3986	4290	4284	4274	4441	4665	4767	4777	5085	5286	5062	4326	3982
75	4767	4096	3790	3991	4044	4525	4261	4464	4677	4639	5024	5184	4988	3982	4270
76	4628	3709	4025	3873	4072	4410	4667	4370	4502	4678	5383	5009	4981	3847	4106
77	4474	3703	4332	4056	3988	4239	4217	4439	4415	4548	4635	5070	5114	4141	4121
78	4433	3574	3925	3962	3969	4234	4366	4684	4627	4540	4771	4932	5065	3889	4059
79	4743	3732	4275	3956	4065	4281	4519	4534	4643	4723	4675	4865	4988	3855	4180
80	4757	3852	3839	3901	4177	4409	4485	4593	4648	4692	4928	4860	5043	4031	4252
81	4681	3681	4071	4198	4085	4341	4568	4895	4484	4634	4978	4768	5069	3851	4226
82	4566	3699	4106	3859	3957	4565	4809	4250	4656	4559	4805	4800	4958	4007	4362
83	4623	3885	3828	4303	4015	4493	4347	4532	4507	4971	4719	5236	5141	4165	3964
84	4659	3683	3726	4193	4321	4520	4303	4742	4621	4727	4759	5271	4860	4033	3938
85	4716	3752	4631	4506	4115	4532	4709	4420	4638	4579	4700	5021	4869	3943	3974
86	4615	3903	3857	4577	4031	4473	4297	4585	4643	4618	4699	4848	4997	4079	4130
87	4752	3771	3933	3990	4140	4367	4237	4976	4567	4871	4660	5060	5025	4088	3970
88	4599	3792	4216	4154	4208	4399	4622	4538	4681	4691	5005	5066	5139	3908	4658
89	4529	3736	3979	4133	4145	4234	4336	4707	4665	4708	4870	5371	5017	4116	4061
90	4421	3712	3845	4282	3962	4219	4283	4407	4488	4727	4853	4765	5140	4118	4079
91	4758	3684	3790	3891	4081	4253	4346	4683	4555	4817	5006	5028	4918	4127	4322
92	4443	3840	3830	3928	4103	4386	4667	4536	4420	4697	4925	4904	4860	3908	4014
93	4486	3628	4177	4836	4025	4180	4550	4293	4548	4604	4995	4968	5088	4173	3976
94	4495	3651	3774	3891	4196	4776	4257	4753	4951	5157	5050	4884	5314	3892	3918
95	4508	3567	3748	3820	4091	4466	4255	4225	4580	4696	4868	5096	4924	3964	4143
96	4490	3773	3920	4011	3992	4330	4652	4586	4494	4630	4982	5006	4991	3867	4105
97	4449	3702	3981	3968	4484	4535	4527	4431	4514	5159	4875	4833	4881	3899	3937
98	4662	3882	3997	4035	4040	4137	4921	4285	4611	4600	4764	5130	4919	4110	4143
99	4669	3825	3914	4449	4103	4160	4597		4550	4812	4696	4879	4850	4110	4269
100	4613	3880	3815	4254	3946		5254		4602	4689	5091	5173	4880	4252	4837
101	4828	3638	3958	4509	4113		4568		4544	4697	4940		4844	4151	4059
102		3664	3890	4212	4101		4500		4685	4622	4784		5059	4514	4245
103		3713	3783	3823	4051		4759		4603	4681	5384		4864	3834	4041
104		3527	3777		4130				4412		4687		4887	4159	3969
105		3794	3704		4032				4540		4842		4827		4042
106		3625			4079				4476		4844		5002		4070
107		3929			4252				4623		4729				4006
108		3754							4601						4053
109									4644						4020

